

Nr 98/2017, 245–249
ISSN 1644-1818
e-ISSN 2451-2486

ZESPOLONA TRANSFORMATA FOURIERA PRĄDÓW LUB NAPIĘĆ UKŁADU TRÓJFAZOWEGO OPARTA NA PRZEKSZTAŁCENIU CLARKE I ROZSZERZONYM PRZEKSZTAŁCENIU FORTESCUE

COMPLEX FOURIER TRANSFORM OF CURRENTS OR VOLTAGES OF 3-PHASE SYSTEM BASED ON CLARKE AND EXTENDED FORTESCUE TRANSFORM

Daniel Wojciechowski

Akademia Morska w Gdyni, Morska 81–87, 81-581 Gdynia, Wydział Elektryczny,
Katedra Automatyki Okrętowej, e-mail: d.wojciechowski@we.am.gdynia.pl

Streszczenie: Transformacja Fouriera jest fundamentalną metodą dekompozycji sygnałów, w tym przebiegów czasowych prądów lub napięć. Reprezentacja częstotliwościowa tych wielkości fizycznych, określonych w układzie trójfazowym, realizowana jest zwykle niezależnie dla każdej fazy. Istotnym ograniczeniem takiej metody jest brak bezpośredniej informacji o rodzaju asymetrii poszczególnych składowych harmonicznych. Asymetria prądów lub napięć określana jest przy zastosowaniu przekształcenia Fortescue, w odniesieniu jedynie do podstawowych harmonicznych tych wielkości. Asymetria wyższych harmonicznych jest więc pomijana. W artykule przedstawiono dwie metody reprezentacji częstotliwościowej wielkości fizycznych układu trójfazowego, zapewniające pełną informację zarówno o odkształceniach harmonicznych jak i niesymetrii, przy zastosowaniu przekształceń, odpowiednio, Clarke i rozszerzonego Fortescue. Pokazano równoważność obydwu metod.

Słowa kluczowe: transformacja Fouriera, przekształcenie Fortescue, przekształcenie Clarke, układ trójfazowy prądów i napięć, harmoniczne, asymetria.

Abstract: Fourier transform is a fundamental method of signal decomposition, including transients of currents and voltages. Spectra of 3-phase quantities are usual independent for all the phases. The drawback of this method is that it doesn't explicitly show the kind of asymmetry of particular harmonics. Asymmetry is usually defined in practice with Fortescue transform, regarding only fundamental harmonics, thus asymmetry of remaining harmonics is neglected. The paper presents two methods of frequency representation of 3-phase system quantities, which provides complete and explicit information both about harmonic distortion and asymmetry. The methods utilize, respectively, Clarke, and Fortescue transformations. There is also shown the equivalency of both methods.

Keywords: Fourier transform, Fortescue transform, Clarke transform, 3-phase system of currents and voltages, harmonics, asymmetry.

1. WSTĘP

Właściwy opis prądów lub napięć trójfazowego układu zasilania ma znaczenie fundamentalne, zarówno z punktu widzenia analizy teoretycznej, jak i zastosowań praktycznych, takich jak np. algorytmy sterowania. Jedną z podstawowych metod opisu tych wielkości, przy spełnieniu warunku ich okresowości, jest transformata Fouriera wyznaczana niezależnie dla każdej fazy. Uzyskane w ten sposób trzy widma częstotliwościowe prądów lub napięć fazowych nie zawierają bezpośredniej informacji o obecności i rodzaju niesymetrii (składowa symetryczna kolejności przeciwnej lub zerowej) poszczególnych harmonicznych. Informacja taka jest istotna zarówno przy analizie teoretycznej, jak i w zastosowaniach praktycznych, np. w algorytmach sterowania przekształtnikami trójfazowymi [Wojciechowski 2010].

Artykuł przedstawia dwie metody opisu prądów lub napięć układu trójfazowego w dziedzinie częstotliwości, zapewniające pełną informację zarówno o ich odkształceniach od przebiegów sinusoidalnych, jak i asymetrii (w tym jej rodzaju) dla każdej ze składowych harmonicznych. Pierwsza z metod wykorzystuje przekształcenie Fortescue, rozszerzone o zastosowanie dla każdej harmonicznej. Druga metoda oparta jest na transformacji Fouriera sygnałów, będących wynikiem przekształcenia Clarke. Obie metody są równoważne.

Sposoby opisu wielkości fizycznych w obwodach trójfazowych zależą od układu sieciowego zasilania, a także od występowania okresowości napięć i prądów. Istotny jest podział na układy sieciowe bez przewodu neutralnego – z trzema przewodami roboczymi (TN-C, TT, IT) oraz z przewodem neutralnym, czyli z czterema przewodami roboczymi (TN-C-S, TN-S). Ze względu na opis wielkości fizycznych obwodu trójprzewodowy układ zasilania można traktować jako uproszczenie układu czteroprzewodowego, natomiast okresowość przebiegów napięć i prądów – jako właściwość szczególną tych przebiegów, umożliwiającą wykorzystanie reprezentacji częstotliwościowej przebiegów czasowych. Przedstawione w artykule metody opisu wielkości fizycznych zorganizowano według powyższego podziału.

2. CZTEROPRZEWODOWY UKŁAD ZASILANIA Z DOWOLNYMI NAPIĘCIAMI I PRĄDAMI

W danym punkcie obwodu czteroprzewodowego układu zasilania (rys. 1) oznacza się przebiegi napięć i prądów fazowych oraz napięcia i prądu wspólnego jako:

$$u_A(t), u_B(t), u_C(t), u_N(t), \quad i_A(t), i_B(t), i_C(t), i_N(t), \quad (1)$$

$$u_N(t) = 1/3 \cdot [u_A(t) + u_B(t) + u_C(t)], \quad i_N(t) = i_A(t) + i_B(t) + i_C(t). \quad (2)$$

Odpowiednie wartości chwilowe napięć i prądów oznacza się jako:

$$u_A, u_B, u_C, u_N, i_A, i_B, i_C, i_N. \quad (3)$$

Wielkości fazowe napięć i prądów można przekształcić do układu ortogonalnego $\alpha\beta 0$ przy zastosowaniu transformacji Clarke [Clarke 1943]:

$$u_{\alpha,\beta,0} = \mathbf{C}\{u_{A,B,C}\}, \quad i_{\alpha,\beta,0} = \mathbf{C}\{i_{A,B,C}\}, \quad \text{przy czym} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} u_\alpha & u_\beta & u_0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{M} \begin{bmatrix} u_A & u_B & u_C \end{bmatrix}^T, \quad \begin{bmatrix} i_\alpha & i_\beta & i_0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{M} \begin{bmatrix} i_A & i_B & i_C \end{bmatrix}^T,$$

gdzie macierz \mathbf{M} ma postać:

$$\mathbf{M}_M = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \text{lub} \quad \mathbf{M}_P = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

odpowiednio dla transformacji z inwariantnością amplitud oraz mocy.

Zaletą przekształcenia (4) jest wydzielenie składowej zerowej 0, która jest związana wyłącznie z wielkościami określonymi dla przewodu neutralnego (u_N, i_N), oraz składowych α, β , które nie zależą od tych wielkości i nie zawierają informacji z nimi związanych. Ponadto ortogonalność składowych α, β pozwala na rzutowanie płaszczyzny $O\alpha\beta$ na płaszczyznę zespoloną z równoważnym układem współrzędnych $\alpha-j\beta$. W rezultacie przebiegi (a także wartości chwilowe) napięć lub prądów fazowych w układzie trójfazowym czteroprzewodowym można zastąpić równoważną parą złożoną z sygnału zespolonego i sygnału rzeczywistego:

$$\mathbf{f}(t) \triangleq \begin{cases} \mathbf{f}(t) = f_\alpha(t) + jf_\beta(t) \\ f_0(t) \end{cases}, \quad \text{gdzie } \mathbf{f}(t) \text{ oznacza } \mathbf{i}(t) \text{ lub } \mathbf{u}(t). \quad (6)$$

3. CZTEROPRZEWODOWY UKŁAD ZASILANIA Z OKRESOWO ZMIENNYMI NAPIĘCIAMI I PRĄDAMI

Metody opisu wielkości fizycznych w układzie zasilania o dowolnych przebiegach napięć i prądów mają zastosowanie również w przypadku spełnienia warunku ich okresowości. Opis ten jest jednak rozszerzony o dodatkowe pojęcia i przekształcenia. Fundamentalne znaczenie ma reprezentacja przebiegów okresowych w dziedzinie częstotliwości. Reprezentacja częstotliwościowa napięć i prądów, opisanych

okresową funkcją czasu $f(t)$, spełniających zawsze w praktyce warunki Dirichleta [Szabatin 1982], wynika z rozwinięcia $f(t)$ w szereg Fouriera:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_1 t) - B_n \sin(n\omega_1 t)], \quad (7)$$

gdzie:

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt, \quad B_n = -\frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

T – okres $f(t)$,

A_n, B_n – amplitudy składowych kosinusoidalnej i sinusoidalnej n -tej harmonicznej,

ω_1 – pulsacja podstawowej harmonicznej,

$A_0/2$ – wartość średnia (składowa stała) funkcji $f(t)$.

Przy zastosowaniu biegunowej reprezentacji amplitud harmoniczych:

$$M_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \varphi_n = \arctan(B_n/A_n), \quad (9)$$

przebiegi napięć lub prądów w fazie k można przedstawić w postaci:

$$f_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} M_{kn} \cos[n(\omega_1 t + d_k 2\pi/3) + \varphi_{kn}], \quad k \in A, B, C, \quad d_A = 0, \quad d_B = -1, \quad d_C = 1. \quad (10)$$

Właściwością ogólną okresowych napięć i prądów w trójfazowym układzie zasilania jest ich niesymetria, która występuje, gdy nie jest spełniony warunek:

$$M_{kn} = M_{ln} \wedge \varphi_{kn} = \varphi_{ln}, \quad \text{gdzie } k, l \in A, B, C \wedge k \neq l. \quad (11)$$

Obwody trójfazowe niesymetryczne opisuje się często przy wykorzystaniu przekształcenia Fortescue [Fortescue 1918], rozkładającego poszczególne niesymetryczne prądy lub napięcia harmoniczne na trzy składowe symetryczne: kolejności zgodnej, kolejności przeciwnej i zerową. Przekształcenie to definiuje się na podstawie reprezentacji n -tej harmonicznej napięć lub prądów fazowych (zgodnie z równaniem 10) za pomocą wskazów zespolonych zdefiniowanych jako:

$$\underline{F}_{kn} = M_{kn} e^{j(n-d_k \cdot 2\pi/3 + \varphi_{kn})}, \quad k \in A, B, C. \quad (12)$$

Przekształcenie Fortescue ma postać:

$$\begin{bmatrix} \underline{F}_{I,n} \\ \underline{F}_{II,n} \\ \underline{F}_{0,n} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F}_{An} \\ \underline{F}_{Bn} \\ \underline{F}_{Cn} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a &= e^{j2\pi/3}, \\ \underline{F}_{I,n} &- \text{składowa zgodna}, \\ \underline{F}_{II,n} &- \text{składowa przeciwna}, \\ \underline{F}_{0,n} &- \text{składowa zerowa } n\text{-tej harmonicznej napięcia lub prądu}. \end{aligned}$$

Poszczególne składowe symetryczne n -tej harmonicznej, wynikające z przekształcenia (13), są wskazami:

$$\underline{F}_{I,n} = M_{I,n} e^{j\varphi_{I,n}}, \quad \underline{F}_{II,n} = M_{II,n} e^{j\varphi_{II,n}}, \quad \underline{F}_{0,n} = M_{0,n} e^{j\varphi_{0,n}}, \quad (14)$$

reprezentującymi rzeczywiste sygnały sinusoidalne o pulsacjach, wynikających z rzędu harmonicznej n . W rezultacie zastosowania przekształcenia (13) otrzymuje się trzy widma częstotliwościowe, osobno dla każdej składowej symetrycznej. Widma te, w przeciwieństwie do widm wielkości fazowych, odwzorowują w sposób całościowy dla trzech faz i przewodu neutralnego zarówno odkształcenia, jak i niesymetrię związaną ze wszystkimi napięciami lub prądami harmonicznymi.

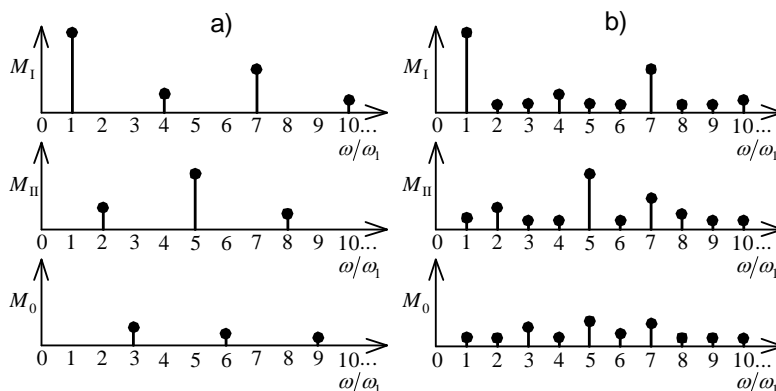
Na rysunku 1a pokazano przykładowe widma amplitudowe składowych symetrycznych dla napięć lub prądów fazowych odkształconych i symetrycznych, natomiast na rysunku 1b – dla odkształconych i niesymetrycznych. Niezerowe składowe odpowiadające symetrycznemu układowi zasilania (rys. 1a) wynikają z równości (11) zastosowanej do (12) i (13). Dla tego przypadku każda z harmonicznych reprezentowana jest przez jedną i tylko jedną niezerową składową symetryczną, wynikającą z zależności:

$$M_{I,n} \neq 0 \Leftrightarrow n = 1 + 3m, \quad M_{II,n} \neq 0 \Leftrightarrow n = 2 + 3m, \quad M_{0,n} \neq 0 \Leftrightarrow n = 3 + 3m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Inna metoda analizy okresowych napięć lub prądów fazowych wynika z reprezentacji (6), uzyskanej z wykorzystaniem przekształcenia Clarke (4).

Na podstawie (16), napięcia lub prądy w trójfazowym czteroprzewodowym układzie zasilania przedstawić można w dziedzinie częstotliwości za pomocą pary złożonej z widma sygnału zespolonego $\underline{f}(t)$ i widma sygnału rzeczywistego $f_o(t)$. Proponuje się następującą reprezentację:

$$\left| \begin{aligned} \underline{f}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{M}_{\alpha\beta,n} e^{jn\omega_1 t}, \quad \text{gdzie } \underline{M}_{\alpha\beta,n} = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} \underline{f}(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \\ f_o(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} M_{0,n} \cos[n\omega_1 t + \varphi_{0,n}], \quad \text{gdzie } M_{0,n}, \varphi_{0,n} \text{ wynikają z (9)}. \end{aligned} \right. \quad (16)$$



Rys. 1. Przykładowe widma amplitudowe składowych symetrycznych według (14), napięć lub prądów fazowych odkształconych: a) symetrycznych, b) niesymetrycznych

Fig. 1. Exemplary spectra of symmetrical components based on (14), of distorted voltages or currents which are: a) symmetrical, b) unsymmetrical

Porównanie reprezentacji (16) (przy zastosowaniu przekształcenia (4) z inwariantnością amplitudy) z (14) prowadzi do następujących spostrzeżeń:

- amplitudy zespolone $\underline{M}_{\alpha\beta,n}$ dla $n \geq 0$ w (16) równe są odpowiadającym im wskazom składowej zgodnej $\underline{F}_{I,n}$ w (14);
- amplitudy zespolone $\underline{M}_{\alpha\beta,n}$ dla $n < 0$ w (16) równe są odpowiadającym im wskazom składowej przeciwnej $\underline{F}_{II,m}$ w (14), przy założeniu $m = -n$;
- amplitudy $M_{0,n}$ i kąty fazowe $\varphi_{0,n}$ harmonicznych składowej zerowej w (16) równe są analogicznie oznaczonym modułom i argumentom wskazów dla danego n , zdefiniowanych w (14).

Powyższe właściwości stanowią o równoważności reprezentacji częstotliwościowej (16), wynikającej z przekształcenia Clarke, z reprezentacją (14), wynikającą z przekształcenia Fortescue, w odniesieniu do okresowych, niesymetrycznych napięć lub prądów występujących w trójfazowym czteroprzewodowym układzie zasilania.

4. PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono dwie metody reprezentacji częstotliwościowej wielkości fizycznych układu trójfazowego, przy zastosowaniu przekształceń, odpowiednio, Clarke i rozszerzonego Fortescue. Istotną zaletą obydwu metod jest całościowy opis wielkości w układzie trójfazowym czteroprzewodowym, z jednoczesnym wydzieleniem składowych napięć lub prądów, związanych z ich odkształceniem oraz niesymetrią, a także wydzielenie składowych, związanych z przewodem neutralnym. Znacząca różnica pomiędzy obiema metodami reprezentacji wynika

z kolejności zastosowanych przekształceń. Reprezentację (16) uzyskano za pomocą:

- przekształcenia Clarke (4), wydzielającego składowe związane z przewodem neutralnym dla dowolnych napięć lub prądów;
- przekształcenia okresowych napięć lub prądów do postaci widmowej, natomiast reprezentację (14) za pomocą:
- przekształcenia poszczególnych, okresowych wielkości fazowych do postaci widmowej, zgodnie z (8) i (9);
- przekształcenia Fortescue (13), wydzielającego składowe symetryczne.

Jedynie pierwsza z metod, prowadząca do reprezentacji (16), opisuje całościowo wielkości w układzie trójfazowym na każdym z dwóch etapów przekształceń. W rezultacie metoda ta, przy potraktowaniu jej drugiego etapu jako opcjonalnego dla okresowych napięć lub prądów, umożliwia pełniejszą analizę wielkości w trójfazowym układzie zasilania z nieokresowymi (dowolnymi) napięciami i/lub prądami.

LITERATURA

- Clarke, E., 1943, *Circuit Analysis of A-C Power Systems*, vol. I, *Symmetrical and Related Components*, John Wiley & Sons, New York.
- Fortescue, C.L., 1918, *Method of Symmetrical Co-ordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks*, A.I.E.E. Transactions, vol. 37.
- Szabatin, J., 1982, *Podstawy teorii sygnałów*, Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa.
- Wojciechowski, D., 2010, *Układ sterowania równoległym filtrem aktywnym ze sprzęgającym obwodem LCL*, „Przegląd Elektrotechniczny”, R. 86, nr 2, s. 65–70.