

## PORÓWNANIE WYBRANYCH ALGORYTMÓW STEROWANIA NAPĘDEM PMSM W STEROWANIU NADAŻNYM

### COMPARISON OF SELECTED TRACKING CONTROL ALGORITHMS FOR PMSM DRIVE

**Łukasz Skarbek**

Akademia Morska w Gdyni, Morska 81–87, 81-581 Gdynia, Wydział Elektryczny,  
Katedra Automatyki Okrętowej, e-mail: lukasz.skarbek@gmail.com

**Streszczenie:** W niniejszym artykule przedstawiono porównanie czterech regulatorów podczas zadania nadażania za zadaną trajektorią. Obiektem symulacji jest napęd z silnikiem PMSM, na którego wale umieszczono dodatkowo masę bezwładną oraz masę skupioną, poruszającą się promieniście. Regulator w żaden sposób nie jest informowany o położeniu masy skupionej. Dodatkowo na układ oddziałuje tarcie, które również nie zostało zamodelowane. Porównano ze sobą regulator PID, regulator ślizgowy w postaci klasycznej, quasi-ślizgowy oraz supertwisting. Na końcu wyniki przedstawiono w tabeli.

**Słowa kluczowe:** sterowanie nadażne, PMSM, sterowanie ślizgowe, sterowanie odporne.

**Abstract:** This paper presents comparison of four selected tracking control algorithms. The simulated plant is a PMSM drive with additional well-balanced inertia load and a point mass, which is moving radially. The controller has no information about position of the point mass. Moreover, friction is present in the plant, but it is unmodelled in the controller. PID, classical sliding mode, quasi-sliding mode and super-twisting controllers are compared. The paper ends with the table of advantages and disadvantages of investigated control algorithms.

**Keywords:** tracking control, PMSM, sliding mode control, robust control.

## 1. WSTĘP

Silniki wykorzystujące magnesy trwałe pojawiły się jako naturalna i pożądana konsekwencja rozwoju inżynierii materiałowej. Jedno z uzwojeń zostało zastąpione magnesem trwałym, co pociągnęło za sobą znaczne konsekwencje. Po pierwsze, w przypadku magnesów zespolonych z wirnikiem wyeliminowany został problem dostarczania energii do obracającego się elementu, czyli m.in. iskrenia między komutatorem a jego szczotkami. Kolejną zaletą jest mniejsza masa właściwa

magnesów i zmniejszenie bezwładności wirnika. Ma to szczególne znaczenie przy napędzie wysokoobrotowym, np. w tzw. multikopterach, gdzie większy moment bezwładności powoduje wydłużenie czasu rozpędzania wirnika do zadanej prędkości. Takie rozwiązanie posiada również wady. Po pierwsze, sterowanie takim napędem jest trudniejsze niż napędem DC, porównywalne z silnikiem indukcyjnym. Do prawidłowego sterowania niezbędny jest falownik i ciągły odczyt wartości absolutnej położenia wału wirnika względem stojana. Cechą charakterystyczną jest istnienie momentu zaczepowego, który powoduje problemy przy sterowaniu z niewielką prędkością obrotową (ang. *cogging effect*). Co więcej, magnesy nigdy nie są identyczne, więc i strumień magnetyczny jest funkcją położenia wirnika względem stojana [Werner 1996].

Celem sterowania nadążnego jest jak najlepsze odwzorowywanie pewnej zadanej trajektorii [Werner 1996]. Można wyróżnić dwa rodzaje takiego ruchu. W pierwszym z nich znane są punkty początkowe i końcowe, więc i trajektoria pomiędzy nimi ustalana jest odgórnie. Możliwe są do wyznaczenia zadane chwilowe wartości położenia, prędkości, przyspieszenia, itd. W drugim przypadku znana jest pozycja początkowa, ale trajektoria jest zmienna w czasie i nie są znane przyszłe wartości jej położenia, prędkości i przyspieszenia. Przykładem pierwszego sterowania jest wykonywanie z góry zaplanowanych ruchów robotów wykonujących zadanie paletyzacji. Przykładem drugiego jest problem stabilizacji działa czołowego podczas jazdy po nierównym terenie.

Celem niniejszego artykułu jest zaprezentowanie czterech wybranych metod sterowania nadążnego przy nieznannej trajektorii. Pierwszą z nich stanowi klasyczny algorytm PID, pozostałe trzy to wybrane rodzaje sterowania ślizgowego (ang. *sliding mode control*) – klasyczne i quasi-ślizgowe oraz tzw. sterowanie typu *supertwisting*. W każdym przypadku omówiono wady i zalety danego rodzaju sterowania w porównaniu z pozostałymi metodami. Na początku znajduje się opis matematyczny obiektu sterowania (wahadła fizycznego) wraz z napędem PMSM (ang. *Permanent Magnet Synchronous Motor*), następnie zaprezentowano prawa sterowania dla każdego przypadku regulatora. Całość podsumowano w tabeli zawierającej wnioski z badań symulacyjnych.

## 2. MODEL MATEMATYCZNY

### 2.1. Model silnika PMSM we współrzędnych $dq$

Silnik PMSM jest maszyną trójfazową zasilaną z sieci przez falownik, najczęściej z pośredniczącym obwodem DC. W celu uzyskania modelu matematycznego silnika dokonuje się serii przekształceń i uproszczeń, które prowadzą do tzw. modelu we współrzędnych  $dq$ , obracających się razem z wirnikiem maszyny.

Założenia obejmują symetryczne uzwojenia, brak prądu zerowego, niezależność strumienia magnetycznego od położenia wirnika względem stojana. Po przejściu z równań w układzie fazowym ABC do układu dwuosiowego  $\alpha\beta$  związanego ze stojanem, a następnie do układu  $dq$ , związanego z wirnikiem, otrzymuje się równania stanu na prądy w dwóch osiach (1, 2) i równanie na rozwijany moment napędowy (3):

$$\frac{di_d}{dt} = L_d^{-1}(-R_s i_d + p\omega_m L_q i_q + u_d) \quad (1)$$

$$\frac{di_q}{dt} = L_q^{-1}(-R_s i_q - p\omega_m L_d i_d - p\omega_m \psi_f + u_q) \quad (2)$$

$$\tau_e = \frac{3}{2} p((L_d - L_q)i_d + \psi_f)i_q \quad (3)$$

gdzie:

- $i$  – prądy,
- $L$  – indukcyjności,
- $R_s$  – rezystancja uzwojeń,
- $p$  – liczba par biegunów,
- $\omega_m$  – prędkość obrotowa wirnika,
- $u$  – napięcie,
- $\psi_f$  – strumień magnetyczny od magnesów stałych,
- $d$  i  $q$  w dolnych indeksach – wartości dla poszczególnych osi tego układu współrzędnych.

W dalszej części przyjęto, że modelowany będzie silnik o magnesach umieszczonych na wirniku, przez co indukcyjności spełniają z dobrym przybliżeniem warunek  $L_d = L_q$ . Przyjęto następujące parametry:  $R_s = 2,8 \Omega$ ,  $L_d = 8 \text{ mH}$ ,  $p = 5$ ,  $\psi_f = 0,11 \text{ Wb}$ .

## 2.2. Model obciążenia

Założono, że silnik napędza walcowy talerz o bezwładności  $30 \text{ kgm}^2$ , promieniu  $1 \text{ m}$  i masie  $30 \text{ kg}$ . Silnik z przekładnią mają bezwładność równą  $39 \text{ kgcm}^2$ . Przekładnia zapewnia przełożenie redukujące równe  $500:3$ . Obciążenie zamontowano w taki sposób, że oś obrotu walca jest prostopadła do wektora przyspieszenia ziemskiego. Dodatkowo po walcu porusza się masa skupiona równa w zakresie całego promienia walca. Zabieg taki symuluje niepewności modelowe oraz zmienne obciążenie dla napędu, gdyż w dalszej części zakłada się, że nic nie wiadomo o aktualnym położeniu masy skupionej. Jedyne informacje obejmują masy i zakres, w jakim może się poruszać. Zakłada się, że masa porusza się na tyle wolno w stosunku do walca, iż efekty jej ruchu można pominąć.

Na podstawie wartości energii kinetycznej ruchu obrotowego i potencjalnej dla tego układu oraz równań Lagrange'a II rodzaju można w prosty sposób wyprowadzić równanie dynamiki, wiążące moment napędowy przykładowy z zewnątrz i prędkość obrotową/pozycją kątową obciążenia:

$$\frac{d\omega_m}{dt} = (J_L + mr^2)^{-1}(\tau - mgr \cos \varphi) \quad (4)$$

gdzie:

- $J_L$  – moment bezwładności walca,
- $m$  – wartość masy skupionej,
- $r$  – odległość masy skupionej od osi walca,
- $\tau$  – przyłożony moment napędowy,
- $g$  – przyspieszenie ziemskie ( $9,81 \text{ ms}^{-2}$ ),
- $\varphi$  – pozycja kątowa masy skupionej.

Dodatkowo ruch masy jest tłumiony przez opory według poniższej relacji:

$$\tau_T = (F_C + (F_S - F_C)e^{-c\omega^2})\text{sgn}(\omega) + f\omega \quad (5)$$

gdzie:

- $F_C$  – siła/moment tarcia suchego,
- $F_S$  – siła/moment tarcia statycznego,
- $c$  – współczynnik Stribecka,
- $f$  – współczynnik tarcia lepkiego.

### 3. STEROWANIE

Stworzony został kaskadowy układ regulacji, którego zadaniem jest odtwarzanie zadanej trajektorii [Werner 1996]. Wewnętrzna pętla regulacji pobiera zadaną wartość momentu i steruje prądem w osi  $q$ , zerując jednocześnie prąd w osi  $d$ . Zewnętrzna pętla regulacji, pracująca na niższej częstotliwości, pobiera aktualną pozycję i na podstawie błędów trajektorii wypracowuje zadany moment napędowy. Różne warianty regulacji będą dotyczyły wyłącznie pętli zewnętrznej. Przemawia za tym kilka czynników. Po pierwsze, regulatory pętli prądowej bardzo często są zaszyte i dostarczane wraz z gotowym napędem, przez co użytkownik musi dostosować się do dynamiki zaprojektowanej przez producenta. W wielu przypadkach regulatory PI w zadowalającym stopniu spełniają wymagania użytkownika. Po drugie, stałe czasowe dla prądów silnika są nierzadko kilka rzędów wielkości mniejsze, przez co z powodzeniem można przyjąć, że prąd zdąży narosnąć do wymaganej wartości, zanim pętla zewnętrzna wykona jedną iterację. Szczególnie dobrze jest to widoczne, gdy pętla prądowa pracuje z częstotliwością

wynoszącą kilkadziesiąt kiloherców, a pętla pozycyjna/prędkościowa nie jest taktowana częściej niż kilkaset razy w ciągu sekundy.

W poniższych symulacjach zadaniem jest śledzenie położenia kąowego wirnika, które zmienia się zgodnie z poniższym wzorem:

$$\varphi_d(t) = \sin(0,4\pi t) \quad (6)$$

Częstotliwość próbkowania pętli wewnętrznej wynosi 10  $\mu$ s, pętli zewnętrznej 1 ms. Okres symulacji wynosi 10 s, a masa skupiona, początkowo znajdująca się na osi wirnika, oddala się od osi obrotu z prędkością 0,1 m/s. Zakłada się, że regulator nie posiada informacji o tarciu i położeniu masy skupionej.

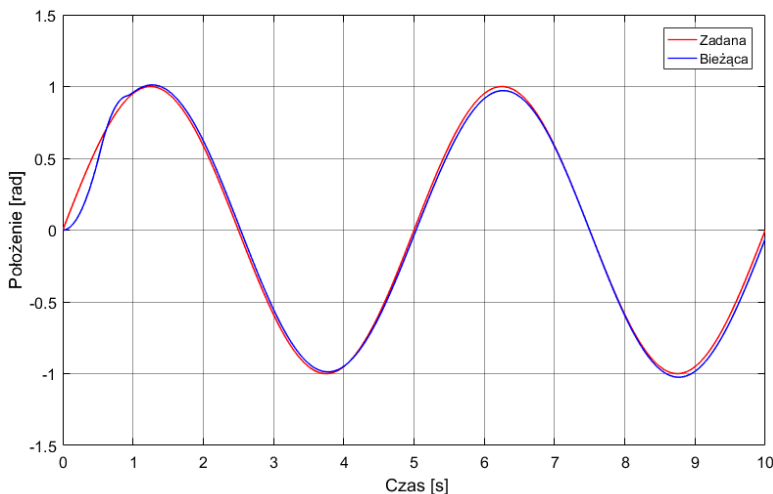
### 3.1. Regulator klasyczny PID

Wykorzystany został prosty regulator PID:

$$\tau = K_P e + K_I \int e dt + K_D \frac{de}{dt} \quad (7)$$

Regulator taki, choć najprostszy i najpopularniejszy, bardzo łatwy w implementacji, nie nadaje się do dokładnego śledzenia trajektorii w obliczu zmiennych parametrów obciążenia oraz braku modelu tarcia. Jak wynika z wzoru (6), regulator PID potrzebuje błędu do tego, by wytworzyć odpowiedni sygnał sterujący (na koniec symulacji, dla  $t = 0$  s, błąd wynosił ponad 50 mrad).

Na rysunku 1 zaprezentowano przebiegi wartości zadanej i odpracowanej.



Rys. 1. Przebieg wartości zadanej i odpracowanej położenia

**Fig. 1.** Plot of desired and actual position

Ze względu na obecność tarcia statycznego nawroty obiektu są realizowane z krótkim przestojem. Jest to czas, w którym błąd musi osiągnąć wartość na tyle dużą, że wypracowany zostanie moment napędowy pokonujący tarcie statyczne. Z biegiem czasu uchyb śledzenia rośnie, co jest wynikiem zwiększonego oddziaływania masy skupionej. Zaletą regulacji PID jest to, że sygnał sterujący jest wielkością ciągłą, co stanowi korzystną cechę dla układu lub układów energoelektronicznych, których zadaniem jest sterowanie kluczami tranzystorowymi.

### 3.2. Regulator ślizgowy – klasyczny

Synteza regulatora ślizgowego opiera się na wprowadzeniu nowej zmiennej, nazywanej zmienną ślizgową, która w procesie regulacji doprowadzana jest do wartości zerowej pomimo oddziaływania niezamodelowanych efektów [Shtessel i in. 2014]. W omawianym przypadku przyjęto zmienną ślizgową jako sumę ważoną błędów położenia i prędkości:

$$\sigma(t) = \dot{e}(t) + ce(t) \quad (8)$$

gdzie  $c$  – współczynnik wagowy.

W sterowaniu ślizgowym ważne jest odgórne określenie wartości niepewności modelowych. W omawianym przypadku można łatwo zauważyć, że tarcie statyczne dominuje w zakresie niskich prędkości, z kolei suma tarcia suchego i lepkiego przewyższa jego wartość przy prędkościach wysokich. Warto oszacować wartość tarcia maksymalnego i tę wartość przyjąć podczas syntezy układu regulacji. Moment siły generowany przez poruszającą się masę również można oszacować odgórnie, obliczając najmniej korzystny przypadek dla  $r = 1$  m.

Na podstawie tych danych można zaprojektować prawo sterowania dla klasycznego regulatora ślizgowego jako:

$$\tau = \rho \operatorname{sgn}(\sigma) \quad (9)$$

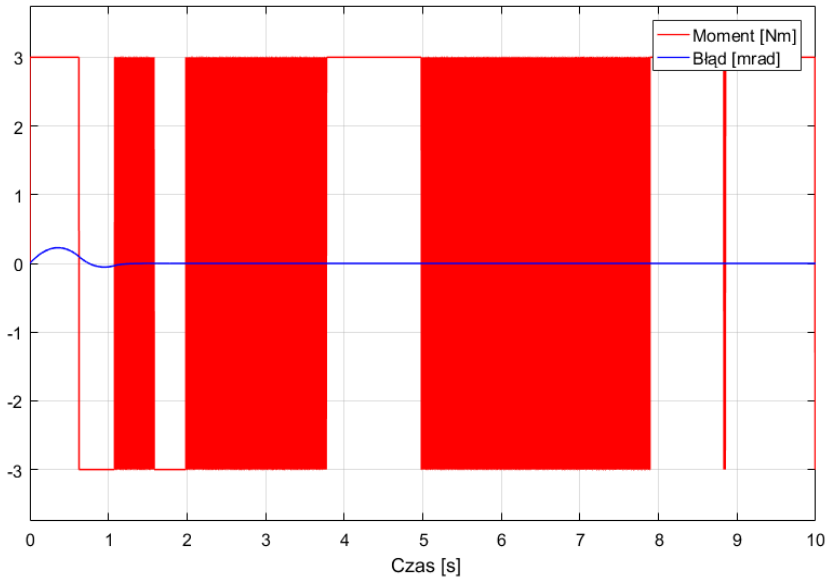
gdzie:

$\operatorname{sgn}(\cdot)$  – funkcja signum zawierająca wartości ze zbioru  $\{-1, 0, 1\}$ ,

$\rho$  – suma wszystkich niepewności.

Przebieg błędu śledzenia wartości zadanej przedstawiono na rysunku 2. Układ trzyma się wartości zadanej z bardzo małym błędem pomimo zakłóceń. Ta dokładność okupiona jest nieakceptowalnym charakterem sygnału sterującego – zgodnie z (9) zmieniającym znak niemal w każdej iteracji (rys. 2). To niszczące zjawisko, często występujące w różnych układach, określa się jako *chattering* [Shtessel i in. 2014; Drakunov i Utkin 1992]. W przypadku układów przekształtnikowych jest

to niemal równoznaczne ze zniszczeniem kluczy tranzystorowych lub części mechanicznych.



**Rys. 2.** Przebieg momentu napędowego i błędu śledzenia

**Fig. 2.** Timeseries of desired torque and tracking error

### 3.3. Regulator quasi-ślizgowy

Problem występujący w poprzednim regulatorze można spróbować minimalizować, zastępując funkcję signum inną funkcją, której charakterystyka jest funkcją ciągłą [Shtessel i in. 2014]. Na rysunku 3 zaprezentowano przebieg śledzenia po zastosowaniu funkcji nasycenia w prawie sterowania:

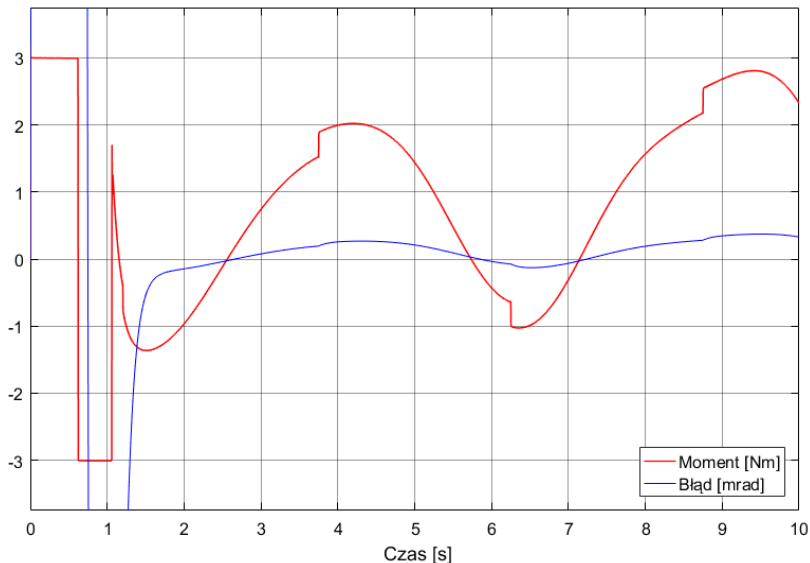
$$\tau = \rho \text{sat}\left(\frac{\sigma}{\phi}\right) \quad (10)$$

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ x, & -1 < x < 1 \\ -1, & x \leq -1 \end{cases} \quad (11)$$

gdzie  $\phi$  dopuszczalny błąd.

Poprawa jakości sygnału sterującego, okupiona dopuszczeniem pewnego błędu śledzenia, jest od razu widoczna na przebiegu uchybu. Zadaniem dla pro-

jektanta jest znalezienie złotego środka pomiędzy gwałtownością sygnału sterującego a dopuszczalnym uchybem.



Rys. 3. Przebieg momentu napędowego i błędu śledzenia

Fig. 3. Timeseries of desired torque and tracking error

### 3.4. Regulator *supertwisting*

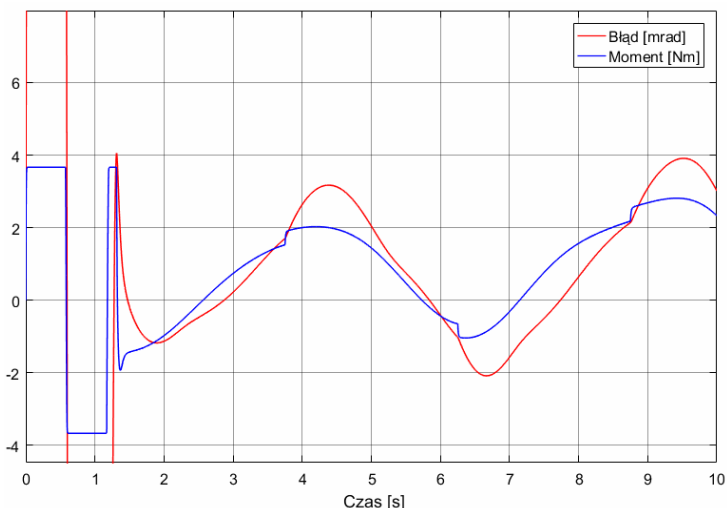
Regulator typu *supertwisting* to jeden z rodzajów regulatorów ślizgowych, który charakteryzuje się sprowadzaniem zmiennej ślizgowej i jej pochodnej do zera w skończonym czasie (nie asymptotycznie, jak w przypadku regulatora z punktu 2.3), ale zmienne stanu dążą do zera w sposób asymptotyczny [Gonzalez, Moreno i Fridman 2012; Shtessel, Moreno i Fridman 2017]. Jest to przykład regulatora ślizgowego drugiego rzędu, w którym prawo sterowania wygląda następująco:

$$\begin{cases} \tau = c\sqrt{|\sigma|}\operatorname{sgn}(\sigma) + w \\ \dot{w} = b\operatorname{sgn}(\sigma) \end{cases} \quad (12)$$

Niewątpliwą zaletą tego układu jest jego ciągły charakter – oba człony równania są funkcjami ciągłymi pomimo użycia funkcji signum. Wadą tego rozwiązania jest zwiększenie liczby parametrów, które muszą być dostrojone przez projektanta.

Na rysunku 4 przedstawiono przebieg błędu stabilizacji tego regulatora oraz sygnał sterujący podawany do bloku przekształtnika energoelektronicznego [Werner 1996].





Rys. 4. Przebieg momentu napędowego i błędu śledzenia

Fig. 4. Timeseries of desired torque and tracking error

#### 4. PODSUMOWANIE

W tabeli poniżej (tab. 1) zestawiono wady i zalety omówionych algorytmów sterowania. Należy pamiętać, że wybór dokonany na potrzeby niniejszej pracy nie wyczerpuje w pełni zagadnienia regulacji z wykorzystaniem regulatorów ślizgowych oraz innych, które można by określić jako odporne.

Tabela 1. Zestawienie zalet i wad omówionych algorytmów regulacji

Table 1. Set of advantages and disadvantages of mentioned control algorithms

Nazwa	Zalety	Wady
PID	Doskonale znany w literaturze przedmiotu Stosunkowo łatwy w strojeniu Ciągły sygnał wyjściowy	Nieodporny na niepewności modelowe
Ślizgowy klasyczny	Popularny w kręgach naukowych, w przemyśle niemal nieznan Bardzo prosty w implementacji Wymaga niewielkiej mocy obliczeniowej Odporny na niepewności modelowe	<i>Chattering</i> Potrzeba podstawowej wiedzy o obiekcie, aby określić górne ograniczenia niepewności
Quasi ślizgowy	Prosty w implementacji Wymaga niewielkiej mocy obliczeniowej Odporny na niepewności modelowe W wielu przypadkach z powodzeniem zastępuje bardziej złożone algorytmy	<i>Chattering</i> przy zbyt małym błędzie dopuszczalnym względem niepewności
<i>Supertwisting</i>	Ciągły sygnał wyjściowy Zmienna ślizgowa i jej pochodna osiągną 0	Wymaga dużej wprawy w strojeniu

	w skończonym czasie Wymaga co najwyżej prędkości zmian błędu położenia	
--	---	--

## LITERATURA

- Shtessel, Y., Edwards, C., Fridman, L., Levant, A., 2014, *Sliding Mode Control and Observation*, Springer.
- Drakunov, S., Utkin, V., 1992, *Sliding Mode Control in Dynamic Systems*, International Journal of Control, no. 55(4), s. 1029–1037.
- Werner, L., 1996, *Control of Electrical Drives*, Springer.
- Gonzalez, T., Moreno, J., Fridman, L., 2012, *Variable Gain Super-Twisting Sliding Mode Control*, IEEE Transactions on Automatic Control, no. 57(8), s. 2100–2105.
- Shtessel, Y., Moreno, J., Fridman, L., 2017, *Twisting Sliding Mode Control with Adaptation: Lyapunov Design, Methodology and Application*, Automatica, no. 75, s. 229–235.